Coneixement, arguments i magnituds

Pedro Nicolás Zaragoza
Universitat de Múrcia, Facultat d'Educació

Resum

En aquest treball defensem que tan sols fonamentant l'estudi de les matemàtiques en l'estudi de les magnituds, estarem en condicions de complir un dels propòsits de l'educació, a saber, l'ampliació del nostre coneixement del món.

Abstract

In this work, we argue that only by basing the study of mathematics on quantities will we be able to accomplish one of the educational purposes, namely the broadening of our knowledge about the world.

1. Introducció

Com es mostra a Bosch i Chevallard (2000b), l'expulsió de l'estudi sistemàtic de les magnituds de l'ensenyament de les matemàtiques, portada a terme sota la influència del moviment reformador de l'ensenyament de les matemàtiques anomenat *new maths*, originat als Estats Units a la segona meitat del segle XX i que a Espanya es va anomenar *matemàtica moderna* perquè va arribar a través de la versió francesa *mathématique moderne*, va donar lloc a diversos fenòmens didàctics «indesitjables» que encara sembla que perduren. En aquest treball mostrarem que, a més, no fonamentar l'estudi de les matemàtiques en l'estudi de les magnituds impedeix la consecució d'una de les finalitats bàsiques de les institucions educatives: la transmissió d'un cert tipus essencial de coneixement.

A Gascón i Nicolás (2017, 2019a) defensem fer explícita amb tots els detalls la finalitat de l'educació, que es pressuposa que hauria de ser una pràctica més habitual en els treballs de didàctica de les matemàtiques. Només així es poden transformar els judicis de valor i les prescripcions normatives, tan abundants encara en aquesta disciplina, en enunciats objectius sobre l'eficàcia d'alguns mitjans per assolir aquestes finalitats. Comencem, doncs, a l'apartat 2, analitzant una de les finalitats de l'educació de la qual tractarem en aquest treball: la transmissió de coneixement. Una part d'aquesta anàlisi inclou consideracions sobre els diferents tipus de coneixement i sobre què s'entén per *coneixement proposicional*, el tipus de coneixement que ens interessa aquí.

La construcció de coneixement proposicional, per la seva mateixa definició, requereix la presència d'arguments racionals que apuntalin el que diem conèixer. A l'apartat 3 explorem diferents tipus d'arguments, amb una atenció especial als *arguments deductius* pel seu paper essencial en la pràctica de la comunitat matemàtica.

A l'apartat 4 mostrem com la crisi dels fonaments de les matemàtiques va fer que s'organitzessin al voltant d'axiomes i arguments deductius i va ometre del discurs explícit i oficial l'ús de qualsevol altre tipus d'argument. Com exposem, sense la presència d'aquest altre tipus d'arguments és impossible concebre les afirmacions matemàtiques com a enunciats que expressen un autèntic coneixement proposicional sobre el món. Això, al seu torn, dificulta la consecució de la transmissió d'aquest tipus de coneixement per mitjà de l'ensenyament de les matemàtiques, tot i que aquesta és una de les finalitats educatives essencials.

A l'apartat 5 explorem una organització de les matemàtiques alternativa a la que s'exposa a la secció anterior. Així, en compte de guiar-nos per criteris que provenen de la lògica deductiva, considerem la possibilitat d'oferir una descripció diacrònica de les matemàtiques que mostri com neixen i evolucionen paral·lelament a l'afany humà de dominar un medi material objectiu.

A l'apartat 6 esbossem aquesta organització alternativa de les matemàtiques, que situa la raó de ser dels objectes matemàtics bàsics en la consideració i l'intent de resolució d'alguns tipus de tasques relacionades amb diferents tipus de magnituds i amb contextos que combinen més d'una magnitud.

Finalment, a l'apartat 7 ens referim breument a alguns treballs que, en el marc de la teoria antropològica del didàctic, desenvolupen amb més o menys detall algunes parts de l'esquema presentat a la secció anterior.

2. La transmissió de coneixement

Una de les finalitats de les institucions educatives és la transmissió de coneixement. Aquesta tasca és difícil de subestimar i, com assenyala Dewey (1916-2004), la subsistència de les societats depèn tant de la transmissió d'informació biològica (que típicament es porta a terme mitjançant la procreació) com de la transmissió d'informació cultural o de coneixement. De fet, tal com explica Everett (2018), al segle XIX una comunitat d'esquimals del nord-oest de Groenlàndia gairebé va desaparèixer després que una epidèmia matés els més vells, que eren els únics custodis dels coneixements que permetien fabricar armes i altres eines clau per a la supervivència. La comunitat va sobreviure perquè es va trobar amb una altra comunitat que li va transmetre els coneixements necessaris. Aquesta anècdota mostra la importància que té per a una societat preservar el coneixement transmetent-lo a les generacions futures.

Podem considerar almenys dos tipus de coneixement: el procedimental (relacionat amb l'ús de tècniques per resoldre certs tipus de tasques) i el proposicional (relacionat amb les creences proposicionals). El *coneixement procedimental* és el coneixement que algú té quan sap fer alguna cosa (anar en bicicleta, cuinar un plat determinat, parlar una llengua). El *coneixement proposicional* és el que es dona quan algú creu que una certa proposició és vertadera i pot justificar racionalment aquesta creença. Això se sol resumir, seguint la fórmula de Plató, dient que coneixement proposicional equival a creença vertadera justificada racionalment (Ichikawa i Steup, 2018). Imposem la condició que la justificació sigui racional perquè al llarg de la història l'ésser humà ha emprat diversos tipus de mitjans per justificar la seva creença en certes proposicions i no tots aquests mitjans convertien la justificació en racional.

Segons que explica l'historiador Fernández-Armesto (1997), en el decurs de diferents èpoques i en diferents cultures s'han emprat fonamentalment quatre modes de justificar la creença en la veritat d'una proposició. Aquests modes han estat sempre presents, competint o cooperant de diverses maneres.

La veritat que un sent. Segons el primer d'aquests modes, un estaria justificat a creure que la proposició *p* és vertadera si en percep la veritat no a través dels sentits o de la raó, sinó a través dels sentiments, com una cosa que un sent. Aquest mètode de justificació de creences és propi de societats preliteràries, però encara perviu entre nosaltres ja que en moltes situacions es continua donant una relació estreta entre sentiments i veritat. De fet, llevat de l'activitat científica, per detectar la veritat d'alguna cosa que se'ns diu no acostumem a emprar una prova més exigent que la de la nostra reacció emocional. I els sentiments que tenim en presència del que percebem com a veritat o mentida tenen molt en comú amb emocions bàsiques com l'amor, la por, la pena o la ràbia, que es registren neurològicament i poden ser mesurades per detectors de mentides.

La veritat que se'm diu. D'acord amb el segon d'aquests modes, un estaria justificat a creure que la proposició *p* és vertadera si així li ho ha revelat una font d'autoritat, que segons el context pot ser un oracle, un sacerdot, un endeví, un llibre sagrat, una tradició, un diari, alguna persona experta en la matèria en qüestió, etc.

La veritat que jo percebo a través dels meus sentits. Malgrat que sembla de sentit comú que hagi de donar per vertader el que percebo sensorialment (per exemple, la proposició «aquesta tassa és damunt la taula» és vertadera perquè jo veig que aquesta tassa és damunt la taula), una de les troballes de Fernández-Armesto (1997) és que la preponderància d'aquest mode de detecció de veritats davant d'altres és relativament tardana. En qualsevol cas, l'abast de l'ús dels meus sentits per a l'establiment de veritats és realment limitat.

La veritat que jo argumento. Aquest mode consisteix en l'ús de l'argumentació per justificar creences. Així, un estaria justificat a creure que una proposició *p* és vertadera si hi ha algun argument satisfactori a favor de *p*. És imprescindible la presència d'un argument satisfactori per distingir el coneixement proposicional de les creences vertaderes que resulten de la mera especulació o de l'endevinament. En efecte, si algú creu que *p* no té cap argument satisfactori a favor de *p* i resulta que *p* és vertadera, no direm que aquest algú *sap* que *p*.

A l'efecte d'aquest treball, anomenem *justificació racional* a la justificació d'una creença mitjançant aquests dos últims modes: la percepció sensorial i l'elaboració d'arguments satisfactoris.

3. Tipus d'arguments racionals

Ens basarem en la disciplina especialitzada en l'assumpte, la lògica (amb un enfocament pragmàtic, si es vol), per veure amb més deteniment què és un *argument* i què s'ha de complir perquè sigui *satisfactori*.

Amb el llenguatge, els éssers humans no només expressem proposicions, és a dir, no solament proposem situacions possibles del món com succeeixen realment. També prometem, felicitem, inaugurem, preguem, instem... Expressar proposicions, felicitar, inaugurar, pregar, instar... totes aquestes accions són el que anomenem *actes de parla*, accions que fem per mitjà de les paraules i que es caracteritzen per la *pretensió* del parlant de portar a terme una finalitat determinada. La teoria dels actes de parla va ser inaugurada pel filòsof John Langshaw Austin amb una sèrie de conferències que va fer el 1955 a la Universitat de Harvard i que es van publicar pòstumament el 1962 en un llibre titulat *How to Do Things with Words*. Un exemple d'acte de parla és *argumentar*.[1] Un argument és una seqüència d'afirmacions caracteritzada per la pretensió que una d'aquestes, que anomenarem *conclusió*, rep suport, s'infereix, se segueix, etc., de les restants, que anomenarem *premisses*.

Els actes de parla es poden fer amb: *èxit*, quan satisfan la finalitat pretesa, o *fracàs*, quan no la satisfan. Així, per exemple, un acte de parla consistent a enunciar una proposició (pretenent dir la veritat) es realitza amb èxit si la proposició és vertadera, i amb fracàs si és falsa.

Un acte de parla consistent a argumentar, presentar un argument, es fa amb:

- èxit (i parlem d'argument *vàlid*) si efectivament les premisses abonen la conclusió;
- fracàs (i parlem d'argument *invàlid*) si les premisses no abonen la conclusió.

Observem que la validesa d'un argument no garanteix per ella mateixa que estiguem justificats a creure la veritat de la conclusió, ja que pot ser que sigui un argument vàlid però amb premisses la veritat de les quals no està justificada, o amb premisses falses. Parlarem aleshores d'argument *satisfactori* per referir-nos a un argument vàlid i de tal manera que la veritat de les seves premisses està justificada. I com es justifica la veritat d'aquestes premisses? En moltes ocasions, mostrant que, al seu torn, elles mateixes són conclusions d'arguments satisfactoris. Afortunadament, això no ens porta a una regressió a l'infinit perquè hi ha proposicions la veritat de les quals no es justifica per mitjà d'un argument, sinó únicament per mitjà del significat d'alguns termes involucrats en l'expressió de la dita proposició. Per exemple, si després de fer coincidir els extrems de dos bastons diem que el que sobresurt és *més llarg* que l'altre, estarem enunciant una proposició vertadera, i això és així únicament pel significat de «més llarg».

Independentment de si són o no satisfactoris, hi ha un tipus d'arguments, que anomenarem *arguments deductius*, en els quals el parlant pretén que no pot estar justificat creure en la veritat de les premisses sense creure en la veritat de la conclusió. Així, els arguments deductius

1. Hi ha un sentit més ampli d'«argumentar» segons el qual el que es pretén és persuadir l'audiència que formi certa creença, fins i tot amb males arts, com ara mitjançant amenaces o mitjançant el carisma del parlant. Aquí reservem el terme «argument» per a un tipus particular de discurs persuasiu, el que proven de convèncer per mitjà de raons.

vàlids, és a dir, aquells en què es compleix la pretensió del parlant, són arguments vàlids en el sentit més fort possible. Per exemple, un argument com el següent: «Tots els homes són mortals. Sòcrates és un home. Per tant, Sòcrates és mortal», és un cas típic d'argument deductiu vàlid, en el qual les premisses són «tots els homes són mortals» i «Sòcrates és un home», i la conclusió és que «Sòcrates és mortal».

La *forma lògica* de l'enunciat, és a dir, el que queda quan substituïm els termes no lògics (és a dir, diferents de «per a tot», «existeix», «i», «o», «si... aleshores...», etc.) per constants, variables i predicats abstractes, és

$$\{((\forall x)(Hx \rightarrow Mx)), Hs\} \models Ms,$$

on x és una variable, s és una constant (en l'argument original era «Sòcrates») i H i M són predicats 1-aris (en l'argument original eren els predicats «ser home» i «ser mortal»). Observem que, sense que importi el significat que donem a la constant s i als predicats H i M, només per la forma lògica de les premisses i la conclusió ja tenim un argument deductiu. En efecte, una de les premisses és que tot individu que compleixi la propietat H complirà forçosament la propietat M i una altra de les premisses és que l'individu concret s compleix la propietat H; aleshores, si un accepta les premisses, per força ha d'acceptar també la conclusió, a saber, que l'individu concret s compleix la propietat M.

Es pot demostrar que el que passa amb l'argument deductiu vàlid anterior passa en general amb tots els arguments deductius vàlids. És a dir, que quan un argument deductiu és vàlid, ho és gràcies a la forma lògica, independentment de la interpretació que fem dels termes no lògics. En altres paraules, la validesa d'un argument deductiu es deu a la seva *sintaxi*, i no a la seva *semàntica*.

Per descomptat, hi ha altres tipus d'arguments, per exemple inductius (Díez i Moulines, 2008), però aquí ens centrarem en els deductius perquè sembla que tenen un paper essencial en les matemàtiques actuals.

4. Les matemàtiques organitzades al voltant dels arguments deductius

Al llarg de la història, l'argumentació duta a terme per la comunitat matemàtica s'ha basat en intuïcions i nocions que, amb el temps, han estat font de contradiccions i paradoxes preocupants i que van donar lloc a una crisi dels fonaments de les matemàtiques a finals del segle XIX i principis del XX. Va ser llavors que una part de la comunitat matemàtica i filosòfica va començar una intensa activitat orientada a establir uns fonaments sòlids per a les afirmacions assumides per la comunitat matemàtica. Els problemes que van motivar la revisió dels fonaments es referien no solament a la naturalesa mateixa de l'activitat matemàtica —què fem quan fem matemàtiques—, sinó a la qualitat dels arguments que s'hi donaven —quan són vàlids, quan són satisfactoris.

Una de les propostes de fonamentació de les matemàtiques es va deure a David Hilbert i es coneix amb el nom de *formalisme*. Segons la versió actual d'aquesta proposta, totes les assumpcions substantives de les matemàtiques han d'estar codificades en una sèrie d'afirmacions, els *axiomes*, mentre que tots els *teoremes* han de derivar dels axiomes únicament per mitjà d'arguments deductius vàlids. Així, només fem servir el significat dels termes no lògics en la tria dels axiomes, però mai en l'elaboració dels arguments que ens porten dels axiomes als teoremes.

Un dels avantatges i, de fet, la motivació principal del formalisme, és que l'ús exclusiu del tipus d'argument vàlid més fort aclareix qualsevol dubte sobre les conclusions obtingudes. A canvi, per la mateixa naturalesa dels arguments deductius, estem obligats a pagar-ne un preu gens menyspreable. En efecte, encara que en les matemàtiques es fan servir molts tipus d'objectes diferents (nombres, dins els nombres diferents tipus de nombres, funcions, dins les funcions diferents tipus de funcions, punts, segments, rectes, plans, hiperplans, superfícies, cossos geomètrics, etc.), l'ús exclusiu d'arguments deductius ens obliga, per raons que no explicarem aquí, a expressar tots aquests objectes en termes d'un únic tipus d'objectes. L'adopció dels conjunts com a objectes bàsics a partir dels quals es construiria tota la resta ha estat un dels peatges que s'ha hagut de pagar. Una altra de les conseqüències del formalisme va ser la necessitat d'expressar mitjançant axiomes algunes de les conclusions per a les quals teníem arguments, encara que aquests arguments no fossin deductius. Per exemple, en la construcció actual de $\mathbb{N}$ dins la teoria de conjunts, la propietat distributiva del producte respecte de la suma està codificada en un axioma (el que defineix el producte de nombres naturals) i no està justificada. Així, un altre dels peatges que es va haver de pagar va ser la desaparició oficial de tot argument que no fos deductiu.

5. Organització alternativa de les matemàtiques

Com hem vist a l'apartat 2, cap creença s'ha de considerar coneixement proposicional sense un argument satisfactori que la tingui com a conclusió, llevat que aquesta creença provingui directament de la nostra experiència sensorial. Per tant, l'ocultació d'alguns arguments fa impossible que algunes proposicions, les conclusions d'aquests arguments, adquireixin estatus de coneixement proposicional. Algunes d'aquestes proposicions són:

- La propietat associativa de la suma de nombres naturals.
- La propietat distributiva del producte respecte de la suma de nombres naturals.
- El mètode del producte creuat per detectar equivalència entre dues fraccions.
- El producte de dues fraccions, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, és la fracció $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
- La divisió de dues fraccions, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, és la fracció $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.
- La propietat distributiva del producte respecte de la suma de nombres decimals.

Si no disposem d'arguments que fonamentin aquestes proposicions, no podem dir que sapiguem el que aquestes proposicions expressen. Així de senzill.

El que tenen en comú totes aquestes proposicions és que els arguments a favor seu no són deductius, sinó que recolzen sobre el significat dels termes no lògics, recolzen sobre el fet que aquests termes es refereixen a quantitats de magnitud.

Vegem el cas de la definició del producte de fraccions. Segons aquesta definició, si $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són dues fraccions, llavors el seu producte és

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Per molt que això es presenti com a definició, té molt sentit preguntar-se per què és veritat, quin és l'argument que avala aquesta afirmació. La resposta a aquesta pregunta no la trobarem en la construcció de les fraccions o dels nombres racionals en el si de la teoria de conjunts. Aquí, precisament, això es dona com a definició, sense cap argument a favor seu. Només si interpretem les fraccions com que fan referència a una quantitat de magnitud, podem començar a justificar racionalment aquesta afirmació. Pensem en les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ fent referència a longituds. Per exemple, pensem en un rectangle els costats del qual mesuren $\frac{2}{3}$ m i $\frac{4}{5}$ m. És fàcil veure que l'àrea d'un rectangle els costats del qual tenen nombres naturals com a mesures ve donada pel producte d'aquests nombres naturals, amb la unitat de mesura corresponent. Així, per extensió, anomenarem també *producte* a l'operació que hem de fer amb les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ per obtenir l'àrea del rectangle, mesurada en m^2. Definint així el producte, la fórmula

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

ens diu que l'àrea d'un rectangle amb costats de $\frac{2}{3}$ m i $\frac{4}{5}$ m és $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ m^2. Ara bé, per què és veritat? El primer pas és considerar aquest rectangle dins un metre quadrat de tal manera que un dels seus costats (per exemple, el vertical) està dividit en 3 parts iguals i l'altre costat (per exemple, l'horitzontal) està dividit en 5 parts iguals. D'aquesta manera, el metre quadrat està dividit en $3 \cdot 5$ parts iguals (3 files per 5 columnes), és a dir, 15 parts. El nostre rectangle inicial està format per 2 vegades 4 (és a dir, 2 files d'alçada per 4 columnes d'amplada) d'aquestes 15 parts. D'aquesta manera, a la fracció $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ m^2 el denominador indica el nombre de parts en les quals es divideix el metre quadrat i el numerador indica quantes d'aquestes parts necessitem per cobrir exactament el nostre rectangle.

Tot i que és controvertit, l'ocultació d'aquest tipus d'arguments pot ser comprensible en institucions educatives com les facultats de matemàtiques. Són en general aquestes institucions les que garanteixen la renovació i la pervivència de la comunitat matemàtica. Així, per tal de deixar els futurs professionals en condicions de continuar la tasca dels seus antecessors, les facultats de matemàtiques els transmeten l'estat actual de la disciplina, si no pel que fa a resultats, sí pel que fa a la conceptualització i la metodologia. La conceptualització actual de les matemàtiques, com a teoria formal expressada en un llenguatge de primer ordre que ha aportat rigor i claredat a una activitat que trobava seriosos problemes de fonamentació, s'ha de comunicar als qui l'han de continuar desenvolupant. Això no obstant, aquest no és el cas dels alumnes d'altres nivells educatius.

Hauríem de disposar aleshores de modes alternatius de presentar les matemàtiques, uns modes més adequats als propòsits de l'educació primària, l'educació secundària i el batxillerat. Un d'aquests propòsits, com dèiem a l'apartat 2, és la transmissió de coneixement, i no hi ha coneixement sense arguments que l'avalin. De manera que, en el decurs dels processos d'estudi de les matemàtiques en aquests nivells educatius, s'hauria d'intentar evitar l'afirmació de proposicions sense el suport d'arguments. En aquest sentit, s'haurien de reconstruir les matemàtiques a partir de les magnituds i admetent l'ús d'arguments no deductius.

Ara bé, si el criteri lògic deductiu no és el que guiarà la presentació de les obres matemàtiques per al seu estudi, analitzant i introduint progressivament les definicions i les demostracions en funció de la seva complexitat lògica, quin podria ser-ne el criteri? En lloc de seguir un criteri analític, podríem seguir un criteri evolucionista, que expliqui les obres matemàtiques com el resultat d'un procés evolutiu i que proporcioni informació sobre la seva història causal. Segons aquest criteri, seria la voluntat de resolució d'alguns tipus de tasques la que impulsaria el desenvolupament de determinades tècniques i l'elaboració d'un discurs teòric cada vegada més sofisticat. Sota aquest prisma, les matemàtiques es presenten com el resultat de la cerca de la millor solució a alguns tipus de problemes, la cerca de la millor resposta a alguns tipus de preguntes. Aquesta cerca no comença trobant ja la solució definitiva, sinó que consisteix en una exploració sostinguda en el temps, en el decurs de la qual es van acumulant i comparant tècniques, nous tipus de tasques i consideracions teòriques. Aquest tipus de descripció diacrònica de les matemàtiques es pot veure des de l'enfocament conegut com *epistemologia evolucionista* (Bradie i Harms, 2020), que proposa considerar el desenvolupament del coneixement com una realització concreta de la idea darwinista abstracta d'evolució.

En didàctica de les matemàtiques, el primer a desenvolupar sistemàticament aquest enfocament va ser Guy Brousseau, fundador de la teoria de les situacions didàctiques (Brousseau, 1997) amb la seva noció de *situació* (Brousseau, 1986, apartat III). Aquesta noció neix sota la influència d'alguns models de la construcció (no instruccional) de coneixement i com a reacció a aquests, elaborats des de la psicologia cognitiva (Burrhus F. Skinner, Jean Piaget, Pierre Gréco, Lev S. Vigotski, Patrick Suppes, etc.). En paraules del mateix Brousseau, «Hem anomenat *situació* a un model d'interacció d'un subjecte amb un determinat medi que determina un coneixement donat com el recurs de què disposa el subjecte per assolir o conservar un estat favorable en aquest medi. Algunes d'aquestes *situacions* requereixen l'adquisició anterior de tots els coneixements i esquemes necessaris, però n'hi ha d'altres que ofereixen una possibilitat al subjecte de construir per ell mateix un coneixement nou en un procés *genètic*» (Brousseau, 2000). Així, en aquest últim tipus de situacions, és possible la gènesi del coneixement com a solució a un problema que un subjecte experimenta en la seva relació amb un medi. En el coneixement que es genera i es desenvolupa a partir d'activitats al voltant de les magnituds, aquest medi és un context material en el qual intervenen alguns objectes que volem comparar respecte d'alguna magnitud.

Un exemple clàssic de situació (Briand, 1993) és aquell en el qual un subjecte té dos conjunts d'objectes, A i B, i ha d'esbrinar quin és més gran. El medi està format pels conjunts d'objectes i per la seva disposició espaciotemporal. Si tots dos conjunts són simultàniament accessibles per al subjecte, llavors pot utilitzar una tècnica estàndard de comparació directa dels dos conjunts, la de l'*aparellament directe*, que consisteix a fer parelles prenent un objecte de A i un altre de B. El primer conjunt que quedi sense objectes és el més petit. Amb tot, si no es pot accedir als conjunts simultàniament, per exemple perquè un dia el subjecte té accés només a A i l'altre dia només a B, aleshores aquesta tècnica de comparació directa ja no funciona. S'ha de portar a terme una tècnica de comparació indirecta, l'*aparellament indirecte*, que consisteix a fer l'aparellament directe entre el conjunt A (respectivament, B) i un conjunt auxiliar, $\mu(A)$ (respectivament, $\mu(B)$), de símbols que l'agent crea, per exemple dibuixant palets en un paper, i a continuació comparar $\mu(A)$ i $\mu(B)$ mitjançant l'aparellament directe. Apareix així un objecte nou, un sistema de numeració primitiu, com a solució a un tipus de problema que, d'una altra manera, no hauria tingut una solució fàcil. En aquest cas, la magnitud en joc és la magnitud *cardinalitat*.

Des de la didàctica de les matemàtiques no s'afirma que aquest fos exactament l'esquema que va regir l'aparició de la idea de nombre natural o del primer sistema de numeració. Això no obstant, és un esquema que ens serveix per aprendre la utilitat d'aquests objectes matemàtics, ja que els mostra com la millor solució a una situació problemàtica hipotètica. Aquest esquema es podria veure com una *història contrafàctica* del naixement dels nombres naturals, és a dir, una història que demana que es consideri una situació problemàtica imaginària en vista de la qual es podrà avaluar la importància d'un esdeveniment o altre. Així, el nostre esquema contrafàctic ens ha il·luminat sobre la natura dels nombres naturals, sobre el seu naixement, sobre la seva raó de ser, i ens ha permès imaginar quin tipus de problemes trobaríem si no disposéssim dels nombres naturals i quin tipus de solucions aquests nombres aporten. No és estrany l'ús d'històries contrafàctiques per part dels historiadors (Maar, 2014) i en altres disciplines de les ciències socials (Morgan i Winship, 2007; Elster, 1994), ja que la noció de *fet contrafàctic* ha resultat útil en l'anàlisi de la noció de *causalitat* (Menzies i Beebee, 2020).

6. Model epistemològic de referència general

Així doncs, el repte consisteix, donada una obra matemàtica $\mathcal{O}$, a reconstruir-la mitjançant una història contrafàctica que la presenti com el resultat d'un procés evolutiu en el qual un subjecte agent ideal cerca donar resposta objectiva a determinats tipus de tasques problemàtiques. Cada avenç en aquest procés ha de respondre a la necessitat d'adaptar-se a un medi objectiu, i cada afirmació s'ha d'argumentar en funció dels significats que els termes no lògics del nostre llenguatge adquireixin mitjançant la relació del subjecte agent amb el medi en qüestió.

En molts treballs de didàctica de les matemàtiques, en el marc de la teoria antropològica del didàctic (Bosch, Chevallard, García i Monaghan, 2019), aquestes històries contrafàctiques reben el nom de *model epistemològic de referència* (MER), perquè, en efecte, serveixen de model de referència per a l'estudi de determinats fenòmens didàctics en relació amb la gènesi i l'evolució del coneixement (Gascón i Nicolás, 2019b; Gascón, 2014). En endavant, farem servir aquesta terminologia.

Presentem a continuació un MER general que descriu la gènesi de gran part de les matemàtiques elementals. Les realitzacions particulars d'algunes de les parts serveixen d'esquemes contrafàctics sobre l'origen de diversos aspectes bàsics de diferents dominis de les matemàtiques (els sistemes de numeració, la geometria plana, la geometria espacial, la probabilitat, etc.).

6.1. Sistemes comparatius

L'esquema comença amb un subjecte agent i la consideració, per part d'aquest agent, d'una magnitud. Una magnitud és un *sistema comparatiu*, és a dir, una certa classe d'objectes que comparem entre ells respecte d'una característica comuna determinada que es pot donar en més o menys grau. Així, un sistema comparatiu és un parell $(\Omega, \prec, \sim)$, on Ω és la classe d'objectes que comparem entre ells i $\prec$ i $\sim$ són dues relacions binàries a Ω que compleixen:

- $x \sim x$
- $(x \sim y) \to (y \sim x)$
- $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \to (x \sim z)$
- $((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \to (x \prec z)$
- $(x \prec y) \to \neg(y \prec x)$
- $(x \prec y) \vee (x \sim y) \vee (y \prec x)$

Els sistemes comparatius es reflecteixen en un tret de la nostra llengua quotidiana, que els gramàtics anomenen grau comparatiu dels adjectius.

Els significats de proposicions del tipus $x \sim y$ o $x \prec y$, és a dir, les condicions de veritat, es fonamenten en una sèrie d'accions que defineixen el que anomenem *comparació directa*.

6.2. Exemple

Podem pensar en un sistema comparatiu que podria tenir un domini molt ampli, format virtualment per tots els objectes del món i on comparem respecte de la *massa*. Diem que $x \prec y$ si, col·locats tots dos objectes en sengles plats d'una balança, aquesta es desequilibra en favor de y, i diem que $x \sim y$ si la balança no afavoreix ni x ni y. La prova de la balança constitueix el mètode estàndard de *comparació directa* en el cas de la massa.

6.3. Exemple

Podem pensar en el sistema comparatiu el domini del qual està format pels conjunts finits i on comparem respecte de la *cardinalitat*. Diem que $x \prec y$ si, en fer parelles amb un objecte de x i un altre de y, s'acaben abans els objectes de x. Diem que $x \sim y$ si, en fer parelles amb un objecte de x i un altre de y, ambdós conjunts s'exhaureixen al mateix temps. Aquest aparellament directe és la *comparació directa* en el cas de la cardinalitat.

Molts dels sistemes comparatius que s'estudien a l'educació primària i l'educació secundària (com ara cardinalitat, massa, temps, longitud, àrea, volum) tenen, a més, un predicat triàdic, $\circ$, que serveix per combinar objectes i enunciar coses del tipus $a \circ b = c$.

6.4. Exemple

En el cas de:

- la cardinalitat, $\circ$ fa referència a la unió disjunta,
- la massa, $\circ$ fa referència a l'acció de posar dos objectes al mateix plat de la balança,
- la longitud, $\circ$ fa referència a la coalineació de dues barres.

Típicament, el significat atribuït a aquest predicat fa que les sentències següents siguin vertaderes:

- $(\forall x,y)((x \prec x \circ y) \wedge (y \prec x \circ y))$
- $(\forall x,y,z)(((x \circ y) \circ z) \sim (x \circ (y \circ z)))$
- $(\forall x,y,z)((x \prec y) \leftrightarrow (x \circ z \prec y \circ z))$
- $(\forall x,y,z)((x \prec y) \leftrightarrow (z \circ x \prec z \circ y))$
- $\ldots$

La primera d'aquestes propietats inspira que aquestes magnituds o sistemes comparatius s'anomenin *extensius*.

6.5. Comparació indirecta mitjançant mesurament directe: nombres

A causa de limitacions materials, en la majoria d'ocasions la comparació directa no es pot dur a terme.

El nostre agent crea aleshores la *comparació indirecta*. Aquesta no consisteix a comparar directament els objectes a i b, sinó indirectament, a través de la comparació directa de dos conjunts de símbols (anomenats *nombres*), $\mu(a)$ i $\mu(b)$, que atribuïm als conjunts a i b. En aquest punt del nostre esquema general, l'atribució de $\mu(a)$ de a és un *mesurament directe*, que es porta terme fent ús de les *unitats de mesura*. D'aquesta manera apareixen els sistemes mètrics.

Un *sistema mètric* és una cosa diferent d'un sistema comparatiu. Els sistemes mètrics no tenen correspondència en el llenguatge ordinari. Al contrari, són una creació de l'activitat científica, característica dels estadis més avançats de la ciència. La revolució científica va consistir en gran part en la introducció i l'ús sistemàtic dels sistemes mètrics.

Els sistemes mètrics amplien el llenguatge que fem servir en els sistemes comparatius mitjançant la introducció de nombres, vectors o tensors. En l'educació secundària i el batxillerat només s'estudien explícitament els nombres i els vectors.

La introducció d'un *sistema mètric* significa:

- l'ampliació del nostre univers introduint un conjunt M de nous objectes, els *nombres*,
- la introducció dels coneguts predicats diàdics, $<$ i $=$, referits als nombres,
- la introducció d'una funció $\mu : \Omega \longrightarrow M$ que fa correspondre un nombre a un objecte. En la sentència $\mu(a) = m$ diem que m és la *mesura* de a.

A més, s'ha de complir que les sentències següents siguin vertaderes:

$$(\forall x,y)((x \prec y) \leftrightarrow (\mu(x) < \mu(y)))$$
$$(\forall x,y)((x \sim y) \leftrightarrow (\mu(x) = \mu(y)))$$

Donat un sistema comparatiu, la *metrització* implica ampliar-ne el llenguatge per introduir també en la nostra activitat un sistema mètric. La metrització d'un sistema comparatiu consisteix a definir una funció μ. Cal no confondre *metrització* amb *mesurament*, que consisteix, donat un sistema comparatiu ja metritzat i donat un objecte a, a trobar el valor $\mu(a)$. En l'ensenyament obligatori la construcció de mesures és una activitat molt marginal. En canvi, en l'àmbit de les ciències socials i de l'estadística és una activitat important. Per exemple, un qüestionari es pot considerar una μ (o un projecte de μ) per mesurar opinions, creences, etc.

Hi ha determinats sistemes comparatius que, de moment, només tenen *metritzacions ordinals*, que es limiten a assignar nombres a objectes respectant l'ordre del sistema comparatiu (per exemple, l'escala de Richter per a la intensitat dels terratrèmols, la de Beaufort per a la dels vents, la de Mohs per a la duresa dels minerals o la de Likert en les opcions de resposta a un qüestionari). Afortunadament, hi ha sistemes comparatius que tenen *metritzacions proporcionals*, que no només ens diuen quan un objecte és més o menys que un altre respecte d'alguna característica, sinó que ens diuen en quina proporció l'un és més o menys que l'altre. Aquest tipus de metrització és possible amb alguns sistemes comparatius extensius. Per a això, es fixa una classe d'equivalència d'objectes $[u]$ respecte de la relació d'equivalència $\sim$. Aquesta classe d'equivalència es dirà *unitat de mesura*. A continuació, donat un objecte a, trobem el nombre m de manera que

$$a \sim u \circ \overset{m \text{ vegades}}{\cdots} \circ u,$$

on u és un representant de la unitat de mesura. Llavors establim $\mu(a) = m$. Si la comprovació de l'equivalència

$$a \sim u \circ \overset{m \text{ vegades}}{\cdots} \circ u$$

s'ha fet mitjançant comparació directa, aleshores diem que el mesurament de a ha estat un *mesurament directe*. El mesurament directe amb el treball de la magnitud *cardinalitat* dona lloc, en primera instància, als nombres naturals. Quan es consideren altres magnituds, per exemple la *longitud* o la *massa*, apareix la necessitat d'ampliar el conjunt numèric per incloure els nombres decimals positius finits i les fraccions positives, i apareixen les nocions de *fracció equivalent* i *nombre racional*, i el pas de decimal a fracció i viceversa.

La metrització proporcional ens permet sovint argumentar a favor de sentències com $(a \prec b)$ o $(a \sim b)$. En efecte, a partir de les premisses $\mu(a) = n$, $\mu(b) = m$ i $n < m$, podem elaborar un argument que tingui per conclusió $a \prec b$. En aquest cas, diem que hem dut a terme una *comparació indirecta*.

6.6. Comparació indirecta mitjançant mesurament indirecte: operacions numèriques

Desafortunadament, de vegades el mesurament directe no és possible. Tot i això, en moltes ocasions el nostre agent pot dur a terme la comparació indirecta mitjançant el *mesurament indirecte*. El mesurament indirecte és un mesurament (és a dir, trobar el valor $\mu(a)$ per a un determinat a), però no es fa comparant directament a amb diversos representants de la unitat de mesura. Vegem com es pot dur a terme aquest mesurament indirecte.

La metrització que solem introduir en els sistemes comparatius extensius amplia el nostre llenguatge mitjançant la introducció del conegut predicat diàdic suma, $+$, referit a nombres, i fa vertadera la sentència següent:

$$(\forall x,y)(\mu(x \circ y) = \mu(x) + \mu(y)).$$

Vegem com es podria fer servir la suma per dur a terme aquest mesurament indirecte. Imaginem que volem mesurar l'objecte a i que no es donen les condicions materials per fer un mesurament directe. Una alternativa seria verificar les sentències $a = b \circ c$, $\mu(b) = n$ i $\mu(c) = m$. I llavors, amb aquestes premisses, podem elaborar un argument que tingui com a conclusió la sentència $\mu(a) = n + m$.

Així doncs, segons el nostre esquema contrafàctic, les operacions en matemàtiques (no només la suma) entre nombres naturals, fraccions positives i nombres decimals positius finits apareixen per tal que el nostre agent pugui dur a terme mesuraments indirectes. Observem que la divisió entre nombres decimals finits pot donar lloc a nombres decimals infinits, però, en tot cas, seran racionals.

Això no obstant, el mesurament indirecte (per exemple, de la hipotenusa d'un triangle rectangle o de la longitud de la circumferència fent servir com a unitat de mesura el diàmetre) provoca l'aparició de certs *nombres irracionals*. Aquests nombres es corresponen amb nombres decimals infinits en què la part decimal no ofereix un patró recurrent.

Les operacions no només serveixen per mesurar indirectament, sinó també per definir altres magnituds (com ara *velocitat mitjana* i *acceleració*).

L'estudi per diferents autors (des de les matemàtiques, la filosofia o la psicologia) dels diferents tipus de magnituds (no només les extensives), les possibles metritzacions i les relacions entre aquestes metritzacions, ha donat lloc al que es coneix com la teoria de la mesura. El naixement i les principals fites d'aquesta teoria fins a la darreria del segle XX estan recollits a Díez (1997a, 1997b) i una gran part d'aquesta teoria s'explica sistemàticament a Krantz, Luce, Suppes i Tversky (1971, 1989, 1990).

6.7. Sistemes de variació de magnituds: proporcionalitat, equacions i funcions

Hi ha ocasions en què el nostre agent considerarà contextos en què intervenen dues magnituds que s'afecten mútuament; per exemple, quan consideri un objecte amb moviment uniforme recorrent una determinada longitud fixa i es pregunti com es relacionen en aquest context les magnituds *velocitat* i *temps*. Parlem en aquest cas d'un *sistema de variació de magnituds* (SVM). Quan en un SVM una quantitat de magnitud correspon unívocament a una altra quantitat de magnitud, diem que és un SVM *determinista*.

Aquests SVM deterministes es poden fer intel·ligibles per mitjà de *relacions de proporcionalitat* (directa o inversa), d'*equacions* i de *funcions* que els governen.

6.8. Sistemes de variació de magnituds: derivades

En ocasions, en els SVM deterministes el nostre agent vol dur a terme un estudi de la *covariació*, és a dir, de com varia una magnitud a partir de variacions de l'altra magnitud involucrada. S'estudiaran per a això els *intervals de creixement* o *decreixement*. Això dona peu a les nocions de *derivada d'una funció en un punt* i *funció derivada*, definides a partir de taxes de variació mitjana calculades en un interval d'amplitud menor que el nostre *grau de precisió* en el maneig de les magnituds involucrades. Mitjançant manipulacions algebraiques es pot calcular la derivada de qualsevol funció racional.

6.9. Sistemes de variació de magnituds: límits

Amb tot, aquestes manipulacions, aquests càlculs, no es poden dur a terme amb un altre tipus de funcions (per exemple, exponencials o trigonomètriques). És aleshores que apareixen les nocions de *límit* i de *continuïtat* (importants per al càlcul de límits, ja que en les funcions contínues el càlcul de límits és especialment fàcil).

La noció de *pas al límit* també apareix com una tècnica de mesurament indirecte en geometria i dona lloc al que es coneix com a *càlcul integral*.

6.10. Probabilitat

Els SVM deterministes estan relacionats amb els *experiments deterministes*, és a dir, aquells en els quals la repetició de l'experiment en condicions similars dona peu al mateix resultat. En contraposició, hi ha també els *experiments aleatoris*, és a dir, aquells en els quals la repetició de l'experiment en condicions similars pot donar peu a resultats diferents.

En la magnitud *probabilitat* es comparen *successos*, és a dir, tipus de resultats d'experiments aleatoris respecte de la seva freqüència relativa a llarg termini. La repetició successiva de l'experiment i el recompte de freqüències relatives és el mètode de comparació directa en el cas de la magnitud *probabilitat*. La fórmula de Laplace (mitjançant el recompte de casos favorables i de casos possibles, per a la qual cosa és molt útil la *combinatòria*) i altres mètodes que involucren la probabilitat condicionada són tècniques de mesurament indirecte de la probabilitat.

7. Alguns treballs sobre les magnituds

A continuació em referiré breument a alguns treballs que han abordat amb deteniment algunes parts de l'esquema anterior en didàctica de les matemàtiques i, més específicament, en la teoria antropològica del didàctic.

Les activitats humanes de comparació directa de dos objectes respecte d'una magnitud extensiva, el seu mesurament directe i el seu mesurament indirecte (per mitjà d'operacions matemàtiques), donen lloc a l'esquema següent:

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \prec, \sim, \circ) \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (M, <, =, +) \\
& (\Omega/\sim, <, =, +) \arrow[ur, "\tilde{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

on $(\Omega, \prec, \sim, \circ)$ és el que hem anomenat *sistema comparatiu*, $(M, <, =, +)$ és el *sistema numèric*, un conjunt de nombres amb l'ordre $<$ i la suma $+$ habituals, i μ és l'aplicació *mesura*, que satisfà:

- $(\forall x,y \in \Omega)((x \prec y) \leftrightarrow (\mu(x) < \mu(y)))$
- $(\forall x,y \in \Omega)((x \sim y) \leftrightarrow (\mu(x) = \mu(y)))$
- $(\forall x,y \in \Omega)(\mu(x \circ y) = \mu(x) + \mu(y))$

L'aplicació π és la projecció de Ω en el conjunt $\Omega/\sim$ de classes d'equivalència, a les quals anomenarem *quantitats de magnitud*. Per diferenciar els objectes de les quantitats de magnitud, pensem en la noció d'*unitat de mesura*. A vegades, s'ha fixat un objecte patró per definir una unitat de mesura, però la unitat de mesura, en realitat, no és un únic objecte, sinó més aviat tota la classe d'equivalència de l'objecte patró corresponent. A Nicolás (2014a) es fan algunes consideracions didàctiques al voltant del fet que, en aquest conjunt quocient, la relació de comparació $\prec$ es transforma en una relació d'ordre $<$, i la relació d'equivalència $\sim$, en igualtat. L'aplicació $\tilde{\mu}$, induïda per μ, es defineix com segueix: $\tilde{\mu}([a]) = \mu(a)$.

Una quantitat considerable dels treballs de Brousseau i els seus col·laboradors se centren en la comparació d'objectes respecte de determinades magnituds extensives (apartat 6.1) i en la construcció del sistema numèric corresponent (apartat 6.5). Una gran part de les seves investigacions s'exposen sistemàticament a Brousseau (2002).

Des de la iniciativa pionera de Hölder (1901), han estat diversos els treballs que han estudiat condicions suficients perquè $\tilde{\mu}$ estableixi un isomorfisme entre les quantitats de magnitud i un cert subconjunt dels nombres reals no negatius, $\mathbb{R}_+$. En aquesta tradició i inspirats per Bourbaki (1963, apartat V.2.) i Whitney (1968), Bosch i Chevallard desenvolupen a Bosch i Chevallard (2000a) una teoria axiomàtica sobre quantitats de magnituds extensives i la seva connexió amb el sistema numèric d'arribada, i consideren possibles ampliacions d'aquest (apartat 6.6) en funció de les necessitats que sorgeixen a partir de les activitats dutes a terme en el sistema comparatiu de partida.

Analitzant els treballs de l'entorn de Brousseau, a Bolea *et al.* (2000, 2002, 2005) es comença a elaborar un model epistemològic de referència al voltant de la mesura de magnituds extensives, que es completa a Sierra (2006). En aquest esquema es fan consideracions sobre la necessitat de l'ampliació del conjunt dels naturals, però es dona per suposada l'existència d'aquests nombres naturals, que no es mostren com a resultat de l'estudi de la magnitud extensiva fonamental, a saber, la *cardinalitat*. Un dels èxits d'aquest model és que mostra de manera general (per a magnituds extensives arbitràries) i més o menys detallada una cosa que ja apareixia (però particularitzat en magnituds específiques i sense tants detalls) en treballs de Brousseau.

A López i Nicolás (2016) es fan algunes consideracions en relació amb la raó de ser dels nombres decimals.

A Nicolás (2014b) i, posteriorment, a García i Sierra (2015) s'amplia el model de Sierra (2006) per incloure la magnitud *cardinalitat* i els nombres naturals dins d'aquest esquema. I més endavant, a Licera (2017), es continua ampliant per mostrar la raó de ser dels nombres irracionals.

A García (2005) es dissenya un model epistemològic de referència sobre el que s'exposa a l'apartat 6.7, en què es connecta l'estudi de la proporcionalitat amb l'estudi de funcions en contextos en què concorren dues magnituds extensives que covarien.

A Abellán (2016) i Bochaca, Gascón i Nicolás (2020) es dissenya un model epistemològic de referència de l'inici del càlcul diferencial que situa la seva raó de ser en la limitació de les tècniques algebraiques per a l'estudi de la covariació de dues magnituds (apartats 6.8, 6.9).

8. Perspectives

El MER exposat a l'apartat 6 és només un esbós del que s'ha fet i moltes de les parts encara s'han de refinar i desenvolupar per tal de guanyar poder explicatiu. Més encara, una gran part de les matemàtiques d'infantil, de primària, de secundària i de la universitat no estan ni tan sols previstes encara en aquest esquema.

A més i segons el que es defensa aquí, no hi ha transmissió de coneixement proposicional sense transmissió d'arguments i el MER sembla que esbossa l'entorn adequat per a la consideració dels diferents tipus d'arguments (no solament els deductius) sobre els quals es fonamenta el coneixement matemàtic del món. Però encara cal dur a terme una anàlisi detallada de la tipologia d'aquests arguments i dels moments en què apareixen.

Potser un llenguatge apropiat per a aquesta empresa sigui el de la teoria de jocs, extensament utilitzat en les ciències socials.[2] En efecte, el nostre *agent* seria un dels jugadors, el *medi* seria un altre dels jugadors i el joc començaria amb certs tipus de tasques que el nostre agent hauria de portar a terme, o amb determinades preguntes a les quals l'agent hauria de respondre. L'agent guanya quan hagi trobat una estratègia per resoldre els tipus de tasques o per respondre les preguntes inicials. Per tal de considerar que un d'aquests jocs explica prou l'obra matemàtica $\mathcal{O}$, s'ha de mostrar que compleix almenys dues condicions: 1) una condició de *necessitat*, és a dir, per elaborar una estratègia guanyadora l'agent ha necessitat construir tots els elements de $\mathcal{O}$ que s'han decidit estudiar,[3] 2) una condició de *possibilitat*,

2. Brousseau, potser inspirat per treballs de l'estil de Suppes (1969), ja va formalitzar la seva noció de *situació* mitjançant la idea de *joc* formal, (Brousseau, 1986, apartat III) i va apuntar l'interès d'aquesta formalització en la consideració de les possibles estratègies dels alumnes, però no va fer un ús sistemàtic d'aquesta formalització.

3. Això implica, en particular, que l'agent explorarà diferents tipus de tècniques per abordar les tasques, que compararà aquestes tècniques, que en menyspRearà unes i en privilegiarà l'estudi d'altres, de manera que, finalment, tot i que en gran mesura es quedés només amb els elements que tradicionalment formen part de $\mathcal{O}$, l'agent s'haurà vist obligat a inspeccionar diferents elements que, típicament, no formen part de la versió oficial de $\mathcal{O}$; en altres paraules, l'agent enriquirà molt la seva praxi matemàtica mitjançant una exploració reflexiva de les diferents possibilitats d'acció.

és a dir, amb tots aquests elements a mà, a l'agent li resulta possible elaborar una estratègia guanyadora.

Una part d'aquest enfocament ha estat considerat a Gascón i Nicolás (2018), inspirat per l'anomenat *model interrogatiu d'indagació* de Hintikka (Hintikka, Halonen i Mutanen, 2002). Aquest enfocament no només ret compte del caràcter dinàmic, evolutiu i adaptatiu de la construcció del coneixement, sinó que també explicita com es construeix aquest coneixement, i l'elaboració d'arguments és un dels moviments dels quals l'agent s'ha de valer per guanyar el joc.

Agraïments

Agraeixo a Ariadna Martín Sirarols la seva traducció al català.

Referències

Abellán, V. (2016). *Cálculo diferencial*. Treball de fi de màster. Múrcia: Universidad de Múrcia.

Bochaca, P., Gascón, J., Nicolás, P. (2020). Juegos didácticos de indagación en torno a la covariación de dos magnitudes. *Caminhos da Educação Matemática*, en premsa.

Bolea, P., Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz, L., Sierra, T. (2000). Análisis didáctico del artículo «El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM» en el marco de la teoría antropológica. *Boletín SI-IDM*, 10. https://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm

Bolea, P., Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz, L., Sierra, T. (2002). Analyse des praxeologies mathématiques autour de la mesure des grandeurs. Dins *Actes de la XI École d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 369-374). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bolea, P., Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz, L., Sierra, T. (2005). Analyse de «Le mesure en CM1» d'après la Théorie Anthropologique du Didactique. Dins P. C. M. H. Salin i B. Sarrazy (eds.), *Sur la Théorie des Situations Didactiques. Hommage à Guy Brousseau* (p. 153-166). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Chevallard, Y. (2000a). Les grandeurs en Mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76.

Bosch, M., Chevallard, Y. (2000b). Les grandeurs en Mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, 5-32.

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F.J., Monaghan, J. (2019). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Bourbaki, N. (1963). *Éléments de mathématique. Livre III. Topologie générale, chapitres 5 à 8*. París: Hermann.

Bradie, M., Harms, W. (2020). Evolutionary Epistemology. Dins E.N. Zalta (ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Disponible en línia a: https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/epistemology-evolutionary/.

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Tesi doctoral, Université Bordeaux 1. Disponible en línia a: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'Enseignement des Mathématiques*. Tesi doctoral, Université Bordeaux 1. Disponible en línia a: https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/509225/filename/TheseetAnnexesGBA.pdf.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. Dins J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot i R. Floris (eds.). *Actes de la 11e ecole d'eté de didactique des mathématiques* (p. 331-348). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dewey, J. (1916/2004). *Democracia y educación*. Madrid: Morata.

Díez, J.A. (1997a). A Hundred Years of Numbers. An Historical Introduction to Measurement Theory 1887-1990. Part I: Suppes and the Mature Theory. *Studies in History and Philosophy of Science*, 28(2), 237-265.

Díez, J.A. (1997b). A Hundred Years of Numbers. An Historical Introduction to Measurement Theory 1887-1990. Part II: The Formation Period. *Studies in History and Philosophy of Science*, 28(1), 167-185.

Díez, J.A., Moulines, C.U. (2008). *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel.

Elster, J. (1994). *Lógica y sociedad. Contradicciones y mundos posibles*. Barcelona: Gedisa.

Everett, C. (2018). *Los números nos hicieron como somos*. Barcelona: Crítica.

Fernández-Armesto, F. (1997). *Truth. A history and a guide for the perplexed*. Nova York: St. Martin's Press.

García, F.J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesi doctoral. Jaén: Universidad de Jaén.

García, F.J. i Sierra, T.A. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: el caso del número en la escuela infantil. Dins C. Fernández, M. Molina i N. Planas (eds.). *Investigación en educación matemática XIX* (p. 299-307). Alicante: SEIEM.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 25 años (número especial)*, 99-123.

Gascón, J., Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the Anthropological Theory of the Didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37(3), 9-13.

Gascón, J., Nicolás, P. (2018). Inquiry-based learning and pre-service teachers education. Dins S.G.V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth i N.M. Hogstad (eds.), *Second conference of the international network for didactic research in university mathematics* (p. 412-421). Proceedings of INDRUM.

Gascón, J., Nicolás, P. (2019a). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 21(4), 36-52.

Gascón, J., Nicolás, P. (2019b). Research ends and teaching ends in the Anthropological Theory of the Didactic. *For the Learning of Mathematics*, 39(2), 42-47.

Hintikka, J., Halonen, I., Mutanen, A. (2002). Interrogative Logic as a General Theory of Reasoning. Dins D.M. Gabbay, R.H. Johnson, H.J. Ohlbach i J. Woods (eds.), *Handbook of the Logic of Argument and Inference, vol. 1* (p. 295-337). Amsterdam: Elsevier.

Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhhandlungen der königliche sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Lepzig Mathematical Physics Classe*, 53, 1-64.

Ichikawa, J.J., Steup, M. (2018). The Analysis of Knowledge. Dins E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University. Disponible en línia a: https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/knowledge-analysis/.

Krantz, D., Luce, D., Suppes, P., Tversky, A. (1971). *Foundations of Measurement, Vol. 1*. Nova York: Academic Press.

Krantz, D., Luce, D., Suppes, P., Tversky, A. (1989). *Foundations of Measurement, Vol. 2*. Nova York: Academic Press.

Krantz, D., Luce, D., Suppes, P., Tversky, A. (1990). *Foundations of Measurement, Vol. 3*. Nova York: Academic Press.

Licera, R. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la enseñanza secundaria y la formación del profesorado*. Tesi doctoral. Valparaíso (Xile): Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

López, M.P., Nicolás, P. (2016). Razón de ser de los números decimales. Dins *Libro de actas del IV Congreso Internacional de Investigación e Innovación en Educación Infantil y Educación Primaria* (p. 156-159). Múrcia: Universidad de Múrcia.

Maar, A. (2014). Possible Uses of Counterfactual Thought Experiments in History. *Principia*, 18(1), 87-113.

Menzies, P., Beebee, H. (2020). Counterfactual Theories of Causation. Dins E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Disponible en línia a: https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/causation-counterfactual/.

Morgan, S.L., Winship, C. (2007). *Counterfactuals and Causal Inference. Methods and Principles of Social Research*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nicolás, P. (2014a). El inicio de la medida de magnitudes en la educación primaria: de las relaciones de comparación a las relaciones de orden. Dins M. Sánchez, A.B. Mirete i N. Orcajada (eds.), *Investigación educativa en las aulas de primaria* (p. 337-348). Múrcia: Universidad de Múrcia.

Nicolás, P. (2014b). La cantidad: una magnitud cardinal en educación intantil y educación primaria. Dins P. Miralles, M.B. Alfageme i R.A. Rodríguez (eds.), *Investigación e innovación en educación infantil* (p. 199-206). Múrcia: Universidad de Múrcia.

Sierra, T.Á. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesi doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Suppes, P. (1969). Stimulus-Response Theory of Finite Automata. *Journal of Mathematical Psychology*, 6(3), 327-355.

Whitney, H. (1968). The Mathematics of Physical Quantities: Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 75(3), 227-256. Disponible en línia a: http://www.jstor.org/stable/2314953